# 4.3 Auflösbarkeit von Gleichungen

Fragen:

1) Kann man die Nullstellen eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[X]$ immer in der Form „was mit Wurzeln" schreiben?

2) Gibt es für geschlossene Formeln?

ZB $X^3 + pX + q$ hat Nullst.

$$\alpha - \frac{p/3}{\alpha}, \quad \alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Hier: Frage 1.

# Exkurs: Einheitswurzeln

$K$: Körper, $\zeta \in K^*$ heißt

- <u>n-te Einheitswurzel</u> $(n > 0)$, falls $\zeta^n = 1$.
- <u>primitive n-te Einheitswurzel</u>, falls $\operatorname{ord} \zeta = n$.

Sei

$$\mu_n(K) = \{ \zeta \in K^* \mid \zeta \text{ ist n-te Einh.wurzel} \}$$

ZB. $\mu_n(\mathbb{C}) = \{ e^{2\pi i k/n} \mid k \in \mathbb{Z} \}$

... Einheitswurzeln

$\mu_n(K) = \{ \zeta \in K^* \mid \zeta$ ist $n$-te Einh.wurzel $\}$

<u>Bem.:</u>

1) $\zeta \in \mu_n(K) \iff \zeta$ ist *Nullst.* von $X^n - 1$

2) $\mu_n(K)$ ist eine Untergruppe von $K^*$. (Warum?)

- Wegen 1) ist $\mu_n(K)$ endlich.
- 2.5, Satz 4 : $\mu_n(K)$ ist zyklisch

# Radikale

<u>**Def.:**</u> $L/K$ Körpererw., $a \in K^*$.

Eine Nullstelle von $X^n - a$ $(n>0)$ heißt ein <u>Radikal von $a$ über $K$.</u> Schreibe $\sqrt[n]{a}$.

⚠ $\sqrt[n]{a}$ ist nur bis auf $n$-te Einheitswurzeln bestimmt:

$u, v$ Nullst. von $X^n - a$

$\Rightarrow$ $u/v$ Nullst. von $X^n - 1$

$\Rightarrow$ $v = \zeta u$, $\zeta \in \mu_n(K)$.

... Radikale

<u>Def.:</u>

Eine Körpererw. $L/K$ heißt <u>durch Radikale auflösbar</u>, falls es Körpererw.

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_k$$

gibt mit

- $L \subset K_k$
- $K_i = K_{i-1}(u_i)$ mit $u_i \in K_i$, $u_i^{m_i} \in K_{i-1}$

  (sei $a_i = u_i^{m_i}$, dann $K_i = K_{i-1}(\sqrt[m_i]{a_i})$)

## ... Radikale

**Def.:**

Für ein Polynom $f \in K[X] \setminus K$ sagt man, <u>die Gleichung $f(X) = 0$ sei durch Radikale auflösbar</u>, falls der Zerfällungskörper $L/K$ von $f$ durch Radikale auflösbar ist

Kann man die Nullstellen eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[X]$ immer in der Form „was mit Wurzeln" schreiben?

$\rightsquigarrow$ Ist für jedes $f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Q}$ $f(X) = 0$ durch Radikale auflösbar?

**Satz 1** $K$ : Körper

$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ s.d. $\operatorname{char} K \nmid N$ falls $\operatorname{char} K \neq 0$.

$K$ enthalte eine primitive $N$-te Einheitswurzel.

Für eine endliche Körpererw. $L/K$ sind äquiv.:

1) $L = K(\sqrt[n]{a})$ für ein $a \in K$ und ein $n > 0$ mit $n \mid N$

2) $L/K$ galoisch und $G(L/K)$ zyklisch mit $|G(L/K)| \mid N$.

**Bem. 2** (Notation aus Satz 1)

- K enthält prim. N-te Einheitswurzel
  $\Rightarrow$ K —"— n-te —"— (Warum?)

- Sei $\zeta \in K$ prim. n-te Einheitswurzel. Dann:

  $$\{ \zeta^k \sqrt[n]{a} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \}$$

  sind die n Nullst. von $X^n - a$.

**Satz 1** $K$ : Körper

$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ s.d. $\operatorname{char} K \nmid N$ falls $\operatorname{char} K \neq 0$.

$K$ enthalte eine primitive $N$-te Einheitswurzel.

Für eine endliche Körpererw. $L/K$ sind äquiv.:

1) ~~$L = K(\sqrt[n]{a})$~~ für ein $a \in K$ und ein $n > 0$ mit $n \mid N$

$L$ ist Zerfällungskörper von $X^n - a$

2) $L/K$ galoisch und $G(L/K)$ zyklisch mit $|G(L/K)| \mid N$.

## Satz 2

Jantzen, Schwermer "Algebra", Kap VI Satz 5.5

$L/K$ endl. Körpererw., char $K = 0$

Es sind äquivalent:

1) $L/K$ ist durch Radikale auflösbar.

2) Es gibt $K \subset L \subset M$ mit $M/K$ endl. & gal., so dass $G(M/K)$ auflösbar.

Erinnerung (Kap I.7):

auflösbare Gruppe $\overset{\text{Def}}{=}$ hat abelsche Normalreihe

## Kor. 3

$L/K$ endl. Körpererw. und galois'sch, char $K = 0$

Es sind äquivalent:

1) $L/K$ ist durch Radikale auflösbar.

2) ~~Es gibt $K \subset L \subset M$ mit $M/K$ endl. & gal., so dass $G(M/K)$ auflösbar.~~

   $G(L/K)$ ist auflösbar.

**Bem.:** $K$ : Körper, $\operatorname{char} K = 0$

$f \in K[X] / K$

$L/K$ : Zerfällungskörper von $f$

Dann.:

1) $L/K$ ist endl. & galois'sch

endl. : ✓

normal : 4.1, Satz 1

separabel : 4.1, Kor. 5

... **Bem.:** $K$ : Körper, $\operatorname{char} K = 0$

$f \in K[X] / K$

$L/K$ : Zerfällungskörper von $f$

2) $\{b_1, \dots, b_n\} \subset L$ Nullst. von $f$. Dann ist

$$s : G(L/K) \longrightarrow S_n$$
$$\varphi \longmapsto s_\varphi \text{ s.d. } \varphi(b_i) = b_{s_\varphi^{-1}(i)}$$

injektiver Gr. hom.

$\ulcorner$

- $b$ Nullst. von $f$ $\Rightarrow$ $\varphi(b)$ Nullst. von $f$ (Warum?)
- $L = K(b_1, \dots, b_n)$, also $\varphi$ durch Wirkung auf $b_i$ festgelegt ($\Rightarrow s$ inj)
- $s$ Gr. Hom : nachrechnen (Details?) $\lrcorner$

# Auflösbarkeit von Gleichungen

- $f \in K[X] \setminus K$ (char $K = 0$)
  $\mathcal{N} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \overline{K}$ Nullst. von $f$.
- $K(\mathcal{N})$ durch Radikale auflösbar
  $\Leftrightarrow$ $G(K(\mathcal{N})/K) \hookrightarrow S_n$ auflösbar
- 1.7, Lem 2: UG von aufl. Gr. sind auflösbar
  1.7, Bsp., Satz 1, Lem 2.:

  $\boxed{S_n \text{ auflösbar} \Leftrightarrow n \le 4}$



- ZB. $X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ hat $G(L/\mathbb{Q}) \simeq S_5$